М. Д. ШИНИБАЕВ[1], А. А. БЕКОВ[2], К. С. АСТЕМЕСОВА[3], Д. И. УСИПБЕКОВА[3]

([1]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г. Шымкент;

[2]Институт космических исследований имени академика У.М.Султангазина АО «НЦКИТ», г. Алматы;

[3]Казахский национальный технический университет им. К.И.Сатпаева, г.Алматы)

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СИЛОВОМ ПОЛЕ

Аннотация

Найден интегрируемый случай динамики твердого тела в ньютоновском поле тяготения. Рассмотрено движение твердого тела относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения для случая, когда главные моменты инерции тела связаны между собой соотношением $A = B = mC$, m – положительное число. Полная система дифференциальных уравнений вращательного движения твердого тела в ньютоновском поле тяготения допускает четыре первых интеграла: интеграл, связанный с постоянной угловой скоростью вокруг оси вращения, тривиальный интеграл, интеграл энергии и интеграл площадей. Согласно общей теории наличие четырех независимых первых интегралов позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Представлены квадратуры для вычисления углов Эйлера. Полученные результаты по интегрируемости движения твердого тела относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения дают основу для разработки методов определения орбитальных параметров поступательного и поступательно-вращательного движения в нецентральном нестационарном поле тяготения. Результаты исследований являются важными для разработки и применения модельных расчетов различных задач небесной механики и динамики космического полета.

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательное движение, моменты инерции тела.

Кілт сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық күйі.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело совершает движение относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения, тогда полная система дифференциальных уравнений движения имеет вид [1, 2]:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ q &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ r &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &A\dot p + (C-B)qr = \varepsilon(C-B)\gamma'\gamma'', \\ &B\dot q + (A-C)pr = \varepsilon(A-C)\gamma''\gamma, \\ &C\dot r + (B-A)pq = \varepsilon(B-A)\gamma\gamma', \quad \varepsilon = \frac{3\mu}{R^3}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\dot\gamma = r\gamma' - q\gamma'', \quad \dot\gamma' = p\gamma'' - r\gamma, \quad \dot\gamma'' = q\gamma - p\gamma', \tag{3}$$

$$\gamma = \sin\varphi\sin\theta, \quad \gamma' = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma'' = \cos\theta, \quad \dot\psi = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1-\gamma''^2}, \tag{4}$$

где θ,φ,ψ – углы Эйлера; μ – гравитационный параметр, R - расстояние от центра масс до центра притяжения; p,q,r – проекции угловой скорости $\overline{\omega}$ на подвижные оси x,y,z; γ,γ',γ'' – направляющие косинусы; A,B,C – главные моменты инерции тела.

Рассмотрим случай, когда главные моменты инерции тела связаны между собой соотношением:

$$A = B = mC, \quad m \neq 0, \quad m > 0, \tag{5}$$

где m – любое положительное число.

Перепишем (2) с учетом (5)

$$\left.\begin{aligned} &\dot p + nqr = \varepsilon n\gamma'\gamma'' \\ &\dot q - npr = -\varepsilon n\gamma\gamma'', \\ &\dot r = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

здесь $n = \dfrac{1-m}{m}$.

Из последнего уравнения (6) имеем

$$r = r_0 = const. \tag{7}$$

Используя первые три уравнения из (4), найдем тривиальный интеграл

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1\,. \tag{8}$$

Умножим первое уравнение из (6) на p, а второе на q

$$\left.\begin{aligned} p\frac{dp}{dt}+npqr_0&=\varepsilon np\gamma'\gamma'' \\ q\frac{dq}{dt}-npqr_0&=-\varepsilon nq\gamma\gamma'' \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

и сложим, тогда учитывая $\dot\gamma''=q\gamma-p\gamma'$, найдем интеграл энергии

$$p^2+q^2+\varepsilon n\gamma''^2=C_1\,. \tag{10}$$

Умножим первое из уравнений (6) на γ, а второе на γ'

$$\left.\begin{aligned} \gamma\frac{dp}{dt}+nqr_0\gamma&=\varepsilon n\gamma\gamma'\gamma'' \\ \gamma'\frac{dq}{dt}-npr_0\gamma'&=-\varepsilon n\gamma\gamma'\gamma'' \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и сложим, учитывая $\dot\gamma''=q\gamma-p\gamma'$, тогда $\gamma'\dfrac{dq}{dt}+\gamma\dfrac{dp}{dt}+nr_0(q\gamma-p\gamma')=0$ перепишется так

$$\gamma'\frac{dq}{dt}+\gamma\frac{dp}{dt}+nr_0\frac{d\gamma''}{dt}=0\,. \tag{12}$$

Преобразуем (12)

$$\frac{d}{dt}(\gamma p+\gamma' q+nr_0\gamma'')=\gamma\frac{dp}{dt}+\gamma'\frac{dq}{dt}+nr_0\frac{d\gamma''}{dt}+r_0\left(-\frac{d\gamma''}{dt}\right),$$

отсюда

$$\frac{d}{dt}(\gamma p+\gamma' q+nr_0\gamma''+r_0\gamma'')=\gamma\frac{dp}{dt}+\gamma'\frac{dq}{dt}+nr_0\frac{d\gamma''}{dt}=0\,,$$

после чего имеем следующий интеграл площадей

$$\gamma p+\gamma' q+r_0(n+1)\gamma''=C_2=const\,. \tag{13}$$

Таким образом, имеем четыре первых интеграла (7), (8), (10), (13)

$$\left.\begin{aligned} &r=r_0=const, \\ &\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1, \\ &p^2+q^2+\varepsilon n\gamma''^2=C_1, \\ &\gamma p+\gamma' q+r_0(n+1)\gamma''=C_2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Согласно общей теории наличие четырех независимых первых интегралов позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (1)-(3).

Из (1) находим следующее соотношение

$$p^2 + q^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 (1 - \gamma''^2) . \tag{15}$$

Из третьего уравнения системы (4) находим

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{1 - \gamma''^2} \cdot \left(\frac{d\gamma''}{dt} \right)^2 . \tag{16}$$

Из третьего уравнения системы (14) находим

$$p^2 + q^2 = C_1 - \varepsilon n \gamma''^2 . \tag{17}$$

Из четвертого уравнения системы (14) и (5) находим

$$\dot{\psi} = \frac{C_2 - r_0 (n+1)\gamma''}{1 - \gamma''^2}, \ \dot{\psi}^2 = \frac{[C_2 - r_0 (n+1)\gamma'']^2}{(1 - \gamma''^2)^2} . \qquad 18)$$

Подставим в (15) выражения (16)-(18)

$$C_1 - \varepsilon n \gamma''^2 = \frac{1}{1 - \gamma''^2} \cdot \left(\frac{d\gamma''}{dt} \right)^2 + \frac{[C_2 - r_0 (n+1)\gamma'']^2}{1 - \gamma''^2} ,$$

отсюда найдем

$$t = \int \frac{d\gamma''}{\sqrt{a_0 \gamma''^4 + a_1 \gamma''^3 + a_2 \gamma''^2 + a_3 \gamma'' + a_4}} + C_3 , \tag{19}$$

где $a_0 = \varepsilon n$, $a_1 = 0$, $a_2 = -[\varepsilon n + C_1 + r_0^2 (n+1)^2]$, $a_3 = 2C_2 r_0 (n+1)$, $a_4 = C_1 - C_2^2$, $C_3 - const$.

Из (19) имеем $t = f(\gamma'')$, обратив его, найдем $\gamma'' = F(t, C_3)$, следовательно, из (16)

$$\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma''^2}} \cdot \left(\frac{d\gamma''}{dt} \right) dt + C_4 . \tag{20}$$

Из (18)

$$\psi = \int \frac{C_2 - r_0 (n+1)\gamma''}{1 - \gamma''^2} dt + C_5 . \tag{21}$$

Из первого уравнения системы (14) имеем

$$r_0 = \dot{\psi}\gamma'' + \dot{\varphi}$$

или

$$\varphi = \int [r_0 - \dot{\psi}\gamma''] dt + C_6 . \tag{22}$$

Новый случай интегрируемости справедлив для всех положительных значений $m > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли.– Алматы, 2010. -132 с.

2 Беков А.А., Шинибаев М.Д. Об одном интегрируемом случае динамики твердого тела в силовом поле // Межд. конф. «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики-II» - Алматы, 28-30 сентября 2011. – С. 274-275.

REFERENCES

1 Shinibaev M.D. Postupatelno-vrashtelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, **2010**, 132 p. (in Russ.).

2 Bekov A.A., Shinibaev M.D. Ob odnom intedriruemom sluchae dinamiki tverdogo tela v silovom pole. Megdunarodnaya konferenziya «Aktualnye problemy sovremennoi matematiki, informatiki i mechaniki-II». Almaty, 28-30 sentyabrya 2011. – P. 274-275. (in Russ.).

Резюме

М. Д. Шыныбаев[1], А. А. Беков[2], К. С. Астемесова[3], Д. И. Өсіпбекова[3]

([1]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент қ. ;

[2]Академик Ө.М.Сұлтангазин атындағы ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы қ.;

[3]Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы қ.)

КҮШТІК ӨРІСІНДЕ ҚАТТЫ ДЕНЕ ДИНАМИКАСЫНЫҢ

БІР ИНТЕГРАЛДАНАТЫН КЕЗІ ТУРАЛЫ

Ньютонның өрісінде қатты дене динамикасының интегралданатын кезі табылған. Қатты дененің салмақ орталығы айналасында қозғалыс қарастырылған, осы жағдайда басты инерция күйі арасындағы байланыс қатынасы $A = B = mC$, m – оң сан. Қатты дененің ньютондық ауырлық өрісінде айналмалы қозғалыстың дифференциальдық теңдеулерінің толық жүйесінің төрт бірінші интегралы бар: айналу өсінің айналасындағы тұрақты бұрыштық жылдамдықпен байланысты интеграл, тривиалдық интегралы, энергия және аудан интегралдары. Жалпы теория бойынша төрт бірінші тәуелсіз интегралдың болуы дифференциалдық тендеулердің жүйесін интегралдауға рұқсат береді. Эйлер

бұрыштарын есептеуге квадратуралар берілді. Қатты дененің салмақ орталығы айналасында ньютон ауырлық өрісінде қозғалыс интегралдану табылған нәтижелері ілгерілемелі және ілгерілемелі-айналмалы орталықтық емес стационар емес ауырлық өрісінде қозғалыстың орбиталар параметрлерінің анықтау әдістерін жасауға негіз береді. Зерттеу нәтижелері аспан механикасы мен ғарыштық ұшу динамикасының әртүрлі үлгі есептерін жасап қолдануға маңызды болып табылады.

Кілт сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон ауырлық өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық күйі.

Summary

M.D. Shinibaev[1], A.A. Bekov[2], K.S. Astemesova[3], D. I. Usipbekova[3]

([1]South Kazakhstan state pedagogical institute, Shymkent;

[2]Space research institute named after Academician U.M. Sultangazin JSC "NCSRT", Almaty;

[3]Kazakh national technical university named after K.I. Satpayev, Almaty)

ON THE ONE INTEGRABLE CASE OF RIGID BODY DYNAMICS IN THE FORCE FIELD

The integrable case of rigid body dynamics in the Newtonian gravitational field is found. The motion of a rigid body relative to the center of mass in the Newtonian gravitational field in the case, where the principal moments of inertia are related $A = B = mC$, m - a positive number. A complete system of differential equations of the rotational motion of a rigid body in the Newtonian gravitational field allows four first integrals: the integral, associated with a constant angular velocity about the axis of rotation, a trivial integral, the energy integral and integral of areas. According to the general theory the existence of four independent first integrals enables us to integrate the system of differential equations. Quadratures to calculate the Euler angles are presented. The obtained results on the integrability of the rigid body motion about center of mass in the Newtonian gravitational field provides the basis for the development of methods for the determination of the orbital parameters of the translational and rotational and translational motion in a non-stationary non-central gravitational field. The research results are important for the development and application of model calculations of the various problems of celestial mechanics and space flight dynamics.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 15.07. 2013 г.